

TURUNAN FUNGSI (DIFERENSIAL)

1. Jika $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 1$ maka tentukan $f'(x)$!

Jawab :

$$f(x) = x^2 - x^{-1} + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + x^{-2} = 2x + \frac{1}{x^2}$$

2. Jika $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{x + 6}$ maka tentukan $f(0) + 6f'(0)$

Jawab :

$$f(0) = \frac{0 - 5}{0 + 6} = -\frac{5}{6}$$

$$f'(x) = \frac{6x(x+6) - 1 \cdot (3x^2 - 5)}{(x+6)^2} \Rightarrow f'(0) = \frac{0 + 5}{36} = \frac{5}{36}$$

$$f(0) + 6f'(0) = -\frac{5}{6} + 6 \cdot \frac{5}{36} = 0$$

3. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + x$ di titik $(-1, 0)$!

Jawab :

$$f'(x) = 6x^2 + 6x + 1$$

$$m = f'(-1) = 6 - 6 + 1 = 1$$

Persamaan garis dengan gradien m dan melalui titik (x_1, y_1) adalah :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = 1(x + 1) \Leftrightarrow y = x + 1$$

4. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^2 - 4x + 3$ yang sejajar garis $y = 2x + 3$!

Jawab :

$$y = 2x + 3 \Rightarrow m_1 = 2$$

Karena sejajar maka $m_2 = m_1 = 2$

$$m_2 = y' \Leftrightarrow 2 = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 9 - 12 + 3 = 0$$

$$y - 0 = 2(x - 3) \Leftrightarrow y - 2x + 6 = 0$$

5. Tentukan interval dimana kurva $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ turun !

Jawab :

$$f'(x) < 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x < 0 \Leftrightarrow 3x(x+2) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0$$

6. Fungsi $y = 4x^3 - 18x^2 + 15x - 20$ mencapai maksimum untuk $x = \dots\dots$

Jawab :

$$y' = 12x^2 - 36x + 15 = 3(2x-1)(2x-5)$$

$$\begin{array}{c} + \qquad \qquad \qquad - \qquad \qquad \qquad + \\ \hline \qquad \qquad 0,5 \qquad \qquad \qquad 2,5 \end{array}$$

jadi fungsi mencapai maksimum di $x = 0,5$

7. Tentukan titik belok fungsi $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 7$

Jawab :

$$y' = 3x^2 + 12x + 9$$

$$y'' = 6x + 12 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 5$$

jadi titik beloknya $(-2,5)$

8. Jika $f(x) = x^2 - 1$ maka tentukan $\lim_{p \rightarrow 0} \frac{f(x+p) - f(x)}{p}$

Jawab :

$$\lim_{p \rightarrow 0} \frac{f(x+p) - f(x)}{p} = f'(x) = 2x$$

9. Tentukan turunan $f(x) = (2 - 6x)^3$

Jawab :

$$f'(x) = 3(2 - 6x)^2 \cdot (-6) = -18(2 - 6x)^2$$

10. Jika $f(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ maka tentukan $f(x) + 2x.f'(x)$

Jawab :

$$f(x) = -2x^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$f(x) + 2x.f'(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}} + 2x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} = 0$$

11. Jika $f(x) = 4\sqrt[4]{x^3} + 10x^5\sqrt{x} - 7$ maka tentukan $f'(1)$!

Jawab :

$$f'(x) = \frac{3}{\sqrt[4]{x}} + 12\sqrt[5]{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{3}{1} + 12 \cdot 1 = 15$$

12. Tentukan turunan $f(x) = (3x^2 + 4)^5(2x - 1)^4$

Jawab :

$$f'(x) = 5(3x^2 + 4)^4 \cdot 6x \cdot (2x - 1)^4 + (3x^2 + 4)^5 \cdot 4(2x - 1)^3 \cdot 2$$
$$f'(x) = (3x^2 + 4)^4 (2x - 1)^3 (84x^2 - 30x + 32)$$

13. Diketahui $f(x) = \frac{2x+4}{1+\sqrt{x}}$. Tentukan $f'(4)$!

Jawab :

$$f'(x) = \frac{2(1+\sqrt{x}) - (2x+4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(1+\sqrt{x})^2}$$

$$f'(4) = \frac{2(1+2) - (8+4) \cdot \frac{1}{2 \cdot 2}}{(1+2)^2} = \frac{1}{3}$$

14. Diketahui $g(x) = \frac{2x-3}{f(x)}$. Jika $f(1) = f'(1) = 1$ maka tentukan $g'(1)$!

Jawab :

$$g'(x) = \frac{2f(x) - f'(x)(2x-3)}{(f(x))^2}$$

$$g'(1) = \frac{2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)}{1} = 3$$

15. Jika $r = \sqrt{\sin \theta}$ maka tentukan $\frac{dr}{d\theta}$

Jawab :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{1}{2}(\sin \theta)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos \theta = \frac{\cos \theta}{2\sqrt{\sin \theta}}$$

16. Tentukan turunan $f(x) = \sqrt{x \sin x}$

Jawab :

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x \sin x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (1 \cdot \sin x + x \cos x) = \frac{x \cos x + \sin x}{2\sqrt{x \sin x}}$$

17. Tentukan turunan $y = \cos^2(2x - \pi)$

Jawab :

$$y' = 2 \cos(2x - \pi) \cdot (-\sin(2x - \pi)) \cdot 2 = -2 \cdot 2 \sin(2x - \pi) \cos(2x - \pi) = -2 \sin(4x - 2\pi)$$

18. Jika $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x}$ maka tentukan $f'(\frac{\pi}{2})$

Jawab :

$$f'(x) = \frac{(\cos x - \sin x) \sin x - (\sin x + \cos x) \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{(\sin \frac{\pi}{2})^2} = -1$$

19. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = x^3 + 3x^2 - 2x - 5$ di titik $(1, -3)$

Jawab :

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$$
$$m = f'(1) = 3 + 6 - 2 = 7$$
$$y + 3 = 7(x - 1) \Leftrightarrow y = 7x - 10$$

20. Tentukan persamaan garis singgung kurva $y = 2x^3 - 4x + 3$ pada titik dengan absis -1

Jawab :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 6x^2 - 4 \\m &= f'(-1) = 6 - 4 = 2 \\x = -1 &\Rightarrow y = -2 + 4 + 3 = 5 \\y - 5 &= 2(x + 1) \Leftrightarrow y = 2x + 7\end{aligned}$$

21. Tentukan gradien garis singgung pada kurva $y = x^3 - 3x^2$ di titik potong dengan sumbu X yang absisnya positif!

Jawab :

$$\begin{aligned}\text{Titik potong dengan sumbu X syaratnya } y &= 0, \text{ sehingga :} \\0 &= x^2(x - 3) \Rightarrow x = 3 \\m = y' &= 3x^2 - 6x \\x = 3 &\Rightarrow m = 27 - 18 = 9\end{aligned}$$

22. Diketahui kurva $y = x^3 + 2ax^2 + b$. Garis $y = -9x - 2$ menyinggung kurva di titik dengan absis 1. Tentukan a !

Jawab :

$$\begin{aligned}y = -9x - 2 &\Rightarrow m = -9 \\m = y' &= -9 = 3x^2 + 4ax \\x = 1 &\Rightarrow -9 = 3 + 4a \Leftrightarrow a = -3\end{aligned}$$

23. Garis g menyinggung kurva $y = x^2 + 2$ di titik dengan absis $\frac{1}{2}$. Tentukan besar sudut yang dibentuk garis g dengan sumbu X !

Jawab :

$$\begin{aligned}f'(x) &= 2x \\m = f'\left(\frac{1}{2}\right) &= 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\m = \tan \alpha &\Rightarrow 1 = \tan \alpha \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ\end{aligned}$$

24. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = x^3$ di titik dengan ordinat 8

Jawab :

$$\begin{aligned}y = 8 &= x^3 \Leftrightarrow x = 2 \\f'(x) &= 3x^2 \\m = f'(2) &= 3 \cdot 2 = 12 \\y - 8 &= 12(x - 2) \Leftrightarrow 12x - y - 16 = 0\end{aligned}$$

25. Kurva $y = (x^2 + 2)^2$ memotong sumbu Y di titik A. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva di titik A !

Jawab :

Titik potong dengan sumbu Y syaratnya $x = 0$

$$y = (0 + 2)^2 = 4 \text{ atau } (0,4)$$

$$f'(x) = 2(x^2 + 2)^1 \cdot 2x = 4x^3 + 8x$$

$$m = f'(0) = 0 + 0 = 0$$

$$y - 4 = 0(x - 0) \Leftrightarrow y = 4$$

26. Tentukan titik potong garis singgung dengan absis 4 pada kurva $y = 2\sqrt{x}$ dengan sumbu X

Jawab :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$m = f'(4) = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 2\sqrt{4} = 4$$

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x - 4) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

Titik potong dengan sumbu X syaratnya $y = 0$

$$0 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow x = -4$$

Jadi titik potongnya $(-4,0)$

27. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $y = 3x^2 - 2x + 5$ yang sejajar dengan garis $y = 4x + 5$

Jawab :

$$y = 4x + 5 \Rightarrow m_1 = 4 \text{ sehingga } m_2 = m_1 = 4$$

$$m_2 = y' \Rightarrow 4 = 6x - 2 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3 - 2 + 5 = 6$$

$$y - 6 = 4(x - 1) \Leftrightarrow y = 4x + 2$$

28. Jika garis singgung kurva $y = ax + bx^{-2}$ pada titik $(-1,-1)$ sejajar dengan garis $4x - y + 65 = 0$ maka tentukan a dan b !

Jawab :

$$y = 4x + 65 \Rightarrow m_1 = 4 \text{ sehingga } m_2 = m_1 = 4$$

$$m_2 = y' \Rightarrow 4 = a - \frac{2b}{x^3}$$

$$x = -1 \Rightarrow 4 = a - \frac{2b}{-1} \Leftrightarrow a + 2b = 4 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$(-1,-1) \text{ pada } y = ax + bx^{-2} \text{ sehingga } -1 = -a + b \quad \dots\dots\dots(2)$$

Dari (1) dan (2) didapat $a = 2$ dan $b = 1$

29. Tentukan persamaan garis singgung pada kurva $x^2 - y + 2x - 3 = 0$ yang tegak lurus garis $x - 2y + 3 = 0$

Jawab :

$$x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow m_1 = \frac{1}{2} \text{ sehingga } m_2 = -\frac{1}{m_1} = -2$$

$$x^2 - y + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow y = x^2 + 2x + 3$$

$$m_2 = y' \Leftrightarrow -2 = 2x + 2 \Leftrightarrow x = -2 \Rightarrow y = 4 - 4 - 3 = -3$$

$$y + 3 = -2(x + 2) \Leftrightarrow y + 2x + 7 = 0$$

30. Tentukan absis-absis dimana garis singgung pada kurva $y = x^3 - 3x^2 + 3$ sejajar dengan sumbu X

Jawab :

Sumbu X atau $y = 0$ sehingga $m = 0$

$$m = y'$$

$$0 = 3x^2 - 6x \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ atau } x = 2$$

31. Garis g melalui (2,4) dan menyinggung parabola $y^2 = 8x$. Jika garis h melalui (0,0) dan tegak lurus pada garis g, maka tentukan persamaan garis h !

Jawab :

$$2y \, dy = 8 \, dx \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{4}{y} = \frac{4}{\sqrt{8x}}$$

$$m_1 = f'(2) = \frac{4}{\sqrt{8 \cdot 2}} = 1 \text{ sehingga } m_2 = -\frac{1}{m_1} = -1$$

$$\text{Persamaan garis h : } y - 0 = -1(x - 0) \Leftrightarrow x + y = 0$$

32. Garis k tegak lurus garis $x + 3y + 12 = 0$ dan menyinggung kurva $y = x^2 - x - 6$. Tentukan ordinat titik singgung garis k pada kurva tersebut !

Jawab :

$$y = -\frac{1}{3}x - 4 \Rightarrow m_1 = -\frac{1}{3} \text{ sehingga } m_2 = 3$$

$$m_2 = y' \Leftrightarrow 3 = 2x - 1 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 - 2 - 6 = -4$$

33. Tentukan interval kurva $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$ naik !

Jawab :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x - 9 > 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-1) > 0$$
$$x < -3 \text{ atau } x > 1$$

34. Tentukan interval grafik $f(x) = x^3 + 3x^2 + 5$ turun !

Jawab :

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 0$$

35. Tentukan interval fungsi $f(x) = \sqrt{x-2}$ naik !

Jawab :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x-2}} > 0 \Leftrightarrow x > 2$$

36. Tentukan interval kurva $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x-1}$ turun !

Jawab :

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{2x(x-1) - 1 \cdot (x^2 + 3)}{(x-1)^2} < 0$$
$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1 \text{ atau } 1 < x < 3$$

37. Tentukan nilai stasioner kurva $y = x^3 - 6x^2 + 5$

Jawab :

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-4) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0 - 0 + 5 = 5$$

$$x = 4 \Rightarrow y = 64 - 96 + 5 = -27$$

38. Tentukan nilai maksimum $f(x) = 2x^3 - 24x + 23$ dalam interval $-3 \leq x \leq 1$

Jawab :

$$f(-3) = -54 + 72 + 23 = 41$$

$$f(1) = 2 - 24 + 23 = 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 24 = 0 \Leftrightarrow 6x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = 23$$

$$x = 4 \Rightarrow f(4) = 128 - 96 + 23 = 55$$

Jadi nilai maksimumnya 55

39. Tentukan nilai minimum relatif fungsi $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

Jawab :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x + 1) = 0$$

$$f(3) = 9 - 9 - 9 + 4 = -5$$

$$f(-1) = -\frac{1}{3} - 1 + 3 + 4 = 5\frac{2}{3}$$

40. Jika nilai minimum fungsi $y = x + \sqrt{p - 2x}$ adalah 4 maka tentukan p !

Jawab :

$$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{\sqrt{p - 2x}} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{p - 1}{2}$$

$$y = x + \sqrt{p - 2x} \Rightarrow 4 = \frac{p - 1}{2} + \sqrt{p - 2 \cdot \frac{p - 1}{2}}$$

$$4 = \frac{p - 1}{2} + 1 \Leftrightarrow p = 7$$

41. Tentukan nilai minimum fungsi $w(\alpha) = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{2 \sec^2 \alpha}$

Jawab :

$$w(\alpha) = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{2 \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{2} \cos 2\alpha$$

$$w'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\sin 2\alpha = 0$$

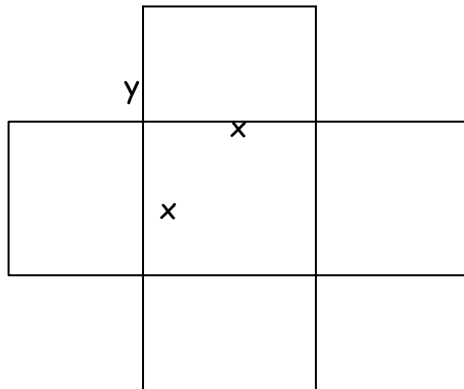
$$\alpha = 0 \Rightarrow w(0) = \frac{1}{2} \cos 0 = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow w\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \cos \pi = -\frac{1}{2}$$

Jadi nilai minimum -1/2

42. Dari sehelai karton kan dibuat sebuah kotak tanpa tutup dengan alas persegi. Jika jumlah luas bidang alas dan semua bidang sisi kotak ditentukan 432 cm^2 , maka tentukan volume kotak terbesar yang mungkin !

Jawab :



$$x^2 + 4xy = 432 \Leftrightarrow y = \frac{432 - x^2}{4x}$$

$$V = x^2 y = x^2 \cdot \frac{432 - x^2}{4x} = 108x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow 108 - \frac{3}{4}x^2 = 0$$

$$x = 12 \Rightarrow V = 108 \cdot 12 - \frac{1}{4} \cdot 12^3 = 864 \text{ cm}^3$$

